EPREUVES BAC 1997 : SIMILITUDE DIRECTE SERIE S2

Catégorie : géométrie plane

On se place dans un repère orthonormal direct $\left(\overrightarrow{o},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z' tel que $z\prime = f(z) = (1+i)z+2$

1) Donner la nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques. On notera A son point invariant.

2) a Donner une construction géométrique du point M image par f.

b) Quelle est la nature du triangle AMM' ?

3) déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que :$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \left\|\overrightarrow{OM'}\right\|$

.

4) Déterminer l'ensemble F des points M du plan tels que :$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0$

5) Tracer E et F dans le repéré $\left(\overrightarrow{o},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

CORRECTION

Corrigé Epreuve 1997 : Similitude directe (4 pts)

Détails

Catégorie : géométrie plane

$f : M(z) \longrightarrow M(z')$ tel que $z' = f(z) = (1+i)z+2$

1) f est une similitude plane directe du plan complexe car étant de la forme $f(z) = az+b$ avec $a = 1+i$

$b = 2$

Déterminons les éléments caractéristiques.

* point invariant : A

$A\left(z_0\right)$ avec $z_0=\dfrac{b}{1-a}=\dfrac{2}{1-i-1}\dfrac{-2}{i}=2i$

$A\left(2i\right)$

* angle de la similitude

$\arg\left(a\right)=\arg\left(1+i\right)=\dfrac{\pi}{4}+2k\overrightarrow{u},k\in\mathbb{Z}$

* rapport de la similitude

$\left|a\right|=\left|1+i\right|=\sqrt{2}$

conclusion

f est la similitude de centre $A\left(2i\right)$ d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

2) a) Construction de $M\prime$ $\grave{a}$ partir de M.

$f\left(M\right)=M'$ équivaut à

b) nature du triangle AMM'

$AMM\prime$ est triangle rectangle et isocèle en M.

En effet : $M\left(z\right)A\left(2i\right)M\left(z'\right)$

$HA\left(2i-z\right)HA\left(-x,2-y\right)$

$MM'\left(z-z'\right)MM'\left(\left(1+i\right)z+2-z\right)$

$MM'\left(iz+2\right)MM'\left(-y+2;x\right)$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MM'}=\left(-x\right)\left(-y+2\right)+\left(2-y\left(x\right)\right)$

Donc $AMM\prime$ triangle rectangle isocèle en M.

3) Détermination de E

$M\left(z\right)z=x+iy$

$M'(z')\ z' = (1+i)z + 2$

$= (1+i)(x+iy) + 2$

$= x - y + 2 + i(x+y)$

$M \in E \Longleftrightarrow \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \left\|\overrightarrow{OM'}\right\|$

$\Longleftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-y+2)^2 + (x+y)^2}$

$\Longleftrightarrow x^2+y^2 = x^2+y^2+4-2xy+4x-4x-4y+x^2+y^2+2xy$

$\Longleftrightarrow x^2+y^2+4x-4x+4=0$

$\Longleftrightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 - 4 - 4 + 4 = 0$

$\Longleftrightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$

$\Longleftrightarrow M \in C(\Omega(-2,2), 2)$

E set le cercle de centre $\Omega(-2,2)$et de rayon 2

4) Détermination de F

$M \in F \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0$

$\Longleftrightarrow x(x-u+2) + y(x+y) = 0$

$\Longleftrightarrow x^2 - xy + 2x + xy + y^2 = 0$

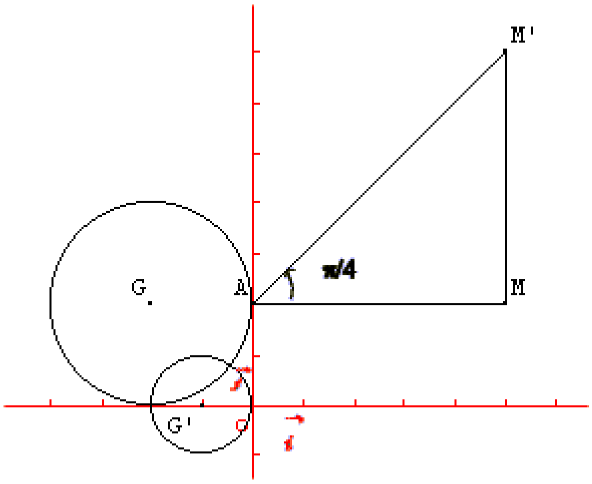
$\Longleftrightarrow x^2 + y^2 + 2x = 0$

$\Longleftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1$

$\Longleftrightarrow M \in C(\Omega(-1,0), 1)$

F est le cercle $\Omega(-1,0)$ et de rayon 1

5)


M'
π/4
G
A
M
G'
O